

Linee guida per lo svolgimento della tesi.

10 dicembre 2018

Indice

1	Ruoli del docente e dello studente	2
2	Redazione della tesi.	3
2.1	LaTeX	3
3	Tempi di svolgimento della tesi	3
4	Versione finale della tesi	3
5	Destinatario della tesi	3
6	Struttura di una tesi	3
6.1	Frontespizio	4
6.2	Sommario	4
7	La ricerca bibliografica.	4
8	Accordamenti da adoperare quando si scrive in LaTeX	5
8.1	Organizzazione dei file .tex	5
9	Accorgimenti di carattere espositivo	5
10	Domande e risposte	6
11	Alcuni errori comuni nella scrittura della tesi	7
12	Riferimenti bibliografici	7
13	Dubbi o incertezze	7
14	Figure	8
15	Introduzione	9
16	Costruzione della σu	11

17 Determinazione delle funzioni ζu , $\wp u$ e $\wp' u$	12
---	----

18 Risoluzione dell'integrale ellittico	14
---	----

1 Ruoli del docente e dello studente

È compito del relatore:

- Guidare lo studente nella scelta dell'argomento della tesi.
- Fornire allo studente un inquadramento del tema e il materiale strettamente necessario per iniziare lo studio dell'argomento.
- Offrire periodicamente allo studente la possibilità di una revisione del testo scritto, dare una valutazione dello stesso, e fornire direttive di carattere generale per il miglioramento di quanto già scritto o per orientare il lavoro successivo.

Non è compito del relatore:

- Correggere errori di grammatica, sintassi, e più in generale di resa dei concetti. È compito dello studente assicurarsi che il testo presentato alla revisione sia scritto secondo le regole della grammatica e della sintassi. Controllare i calcoli o dettagli fini. Di questi e altri dettagli è per intero responsabile lo studente.
- Dire di volta in volta allo studente cose che deve fare: deve essere lo studente, dopo i primi incontri, a presentarsi con delle proposte o delle domande.
- Effettuare la ricerca bibliografica al posto dello studente.
- Studiare il materiale al posto dello studente.

È compito dello studente.

- Effettuare la ricerca bibliografica del materiale da studiare.
- Compiere ogni sforzo possibile per interpretare al meglio, in autonomia, il materiale selezionato.
- Aver ben chiaro, quando si presenta alla revisione, quali sono le domande da porre al docente.
- Cercare autonomamente la soluzione ai problemi e stabilire autonomamente quali sono i passi da seguire per continuare sul problema.
- Scrivere la tesi assicurandosi che il testo presentato al relatore rispetti le linee guida indicate qui nel seguito.

2 Redazione della tesi.

2.1 LaTeX

La tesi va esclusivamente redatta adoperando il linguaggio LaTeX. La pagina di Wikipedia fornisce una prima infarinatura. Una ottima guida online è disponibile su Wikibooks.

Un altro buon punto di partenza è la seguente guida scaricabile gratuitamente da internet presso il seguente indirizzo:

http://www.lorenzopantieri.net/LaTeX_files/LaTeXimpaziente.pdf

Programmi per scrivere in LaTeX abbondano sotto tutti i sistemi operativi. La scelta dipende dai gusti individuali.

3 Tempi di svolgimento della tesi

Lo studente deve essere consapevole, durante la redazione della tesi, del fatto che se il prodotto finale non è adeguato non è possibile accedere alla prova finale.

4 Versione finale della tesi

Lo studente, prima di consegnare la tesi, deve inviare al relatore il file sorgente e tutti i file necessari per la compilazione, **ma non il file PDF. Sarà cura del docente effettuare la compilazione del file per produrre il pdf.**

5 Destinatario della tesi

Il destinatario della tesi di laurea è la commissione di valutazione. La commissione valuta la capacità dello studente di

6 Struttura di una tesi

Una tesi è di norma strutturata come segue:

- Frontespizio
- Sommario
- Eventuali ringraziamenti
- Indice
- Eventuale lista delle tabelle
- Lista delle figure

- Introduzione
- Corpo della tesi
- Conclusioni
- Bibliografia

6.1 Frontespizio

Il frontespizio è la pagina preliminare al testo e riporta le informazioni che identificano il lavoro di tesi, quali:

- istituzione
- il dipartimento
- la materia della tesi
- il titolo della tesi
- il nome del candidato
- il nome del relatore e dei correlatori, se presenti.
- l'anno accademico

6.2 Sommario

L'obiettivo del sommario è fornire in modo conciso l'idea dei contenuti della tesi, circoscrivendo i punti essenziali. Esso costituisce il primo frammento di tesi al quale il lettore si rivolge per stabilire se la tesi può essere di suo interesse oppure no.

Sebbene il sommario sia l'ultima cosa da scrivere, è bene iniziarne la stesura fin da subito.

7 La ricerca bibliografica.

La ricerca bibliografica è un momento fondamentale nello sviluppo della tesi di laurea. È bene che questa venga svolta nella maniera più ampia possibile, per evitare di scoprire, a tesi conclusa, l'esistenza di riferimenti importanti che sono stati trascurati.

Tipicamente la ricerca bibliografica parte da qualche riferimento (articoli, libri, appunti, slide) fornito dal docente, da adoperare come spunto per ulteriori ricerche.

Questi articoli non devono essere necessariamente studiati nel dettaglio. Devono soprattutto essere adoperati per orientarsi nel panorama della letteratura.

La bibliografia di questi riferimenti fornisce lo spunto per selezionare ulteriore materiale. In linea di massima, se un articolo risulta difficilmente comprensibile, non conviene intestardirsi. Conviene piuttosto controllare la bibliografia per vedere se la conoscenza che l'articolo presuppone sono o meno in nostro possesso. In caso negativo, conviene raccogliere gli articoli in bibliografia e procedere a ritroso, finché non si trova qualcosa che si riesca a capire.

Come indicazione di carattere generale conviene sempre andare a ritroso nel tempo, cercando le primissime fonti. In generale, più un articolo o libro è datato, minori sono i presupposti necessari per poterlo comprendere.

In caso di necessità di articoli o testi, inviare una richiesta al docente, il quale provvederà a procurare il materiale necessario.

8 Accordimenti da adoperare quando si scrive in LaTeX

8.1 Organizzazione dei file .tex

Si raccomanda di raccogliere tutti i file ausiliari (figure, etc) che servono per compilare il sorgente tex **nella stessa cartella del sorgente**.

Quando in LaTeX si scrivono delle formule dentro le righe il testo queste vanno racchiuse dentro una coppia di dollari \$. Questo va fatto sia che si stia scrivendo una formula, sia che si stia rappresentando una variabile. Il motivo è che in LaTeX il testo dentro le formule appare in italico, a differenza del testo normale. Ad esempio la variabile T appare come T senza le i simboli dollaro.

9 Accorgimenti di carattere espositivo

A chi è indirizzata la tesi. Il principio guida nella redazione di una tesi è che il contenuto deve svilupparsi in un discorso continuo e lineare. In questo discorso, ogni passaggio deve essere spiegato e introdotto ordinatamente. A tal scopo, lo studente deve immaginare che il lettore al quale è indirizzata la tesi **non sia il docente**, ma un collega inesperto della materia che debba valutare se intraprendere o meno una attività di redazione di tesi nell'argomento, con l'obiettivo di svilupparla.

Cosa dare per scontato e cosa non. Per bagaglio standard dello studente si intendono le nozioni in possesso di uno studente che abbia superato tutti gli esami del percorso di studi. Quando si adoperino nozioni che fanno parte del bagaglio standard, non è necessario che queste nozioni vengano richiamate nel dettaglio. Al contrario, qualora si faccia uso di nozioni o definizioni che non fanno parte del bagaglio standard, queste devono essere esposte nella tesi, eventualmente in una appendice.

Rigore espositivo. Queste indicazioni di massima si concretizzano nella seguenti regole alle quali deve attenersi una tesi caratterizzata da rigore logico e consequenzialità espositiva: ogni affermazione fatta nella tesi deve essere giustificata; ogni passaggio di un ragionamento logico va scritto per esteso, in dettaglio; dove possibile, è opportuno allegare una figura esplicativa; questa può essere, in prima battuta, disegnata a mano, convertita in formato elettronico tramite uno scanner (o tramite una app come camscanner) e inserita nel documento.

Registro espositivo. Nello sviluppare il discorso secondo le direttive di cui sopra non bisogna cadere nel tranello di affidarsi al registro colloquiale — per intenderci, adoperare il linguaggio che si adopera nella forma parlata. Se è vero che la tesi deve essere scritta avendo in mente, come lettore, un collega inesperto nella materia, è anche vero che la tesi sarà valutata da professori universitari. In tal caso, la mancanza di cura nella forma indurrà il lettore a pensare che anche i contenuti soffrano della stessa mancanza. Si consideri il seguente estratto da una bozza di tesi:

Si vuole ora andare ad applicare la teoria degli integrali ellittici
per risolvere l'equazione differenziale:

$$(w')^2 = P(w),$$

dove $P(w)$ un generico polinomio in w .

La locuzione “andare ad applicare”, benché comune nel linguaggio colloquiale è del tutto inopportuna nel contesto della redazione di una tesi. Perché non far uso, più semplicemente, della verbo “applicare”?

10 Domande e risposte

Si riportano alcune domande e risposte frequenti.

DOMANDA: Che programma devo adoperare per scrivere la tesi?

RISPOSTA: La tesi deve essere redatta il LaTeX.

DOMANDA: Devo consegnare solo il cartaceo della tesi o serve altro?

RISPOSTA: Lo studente deve consegnare al docente tutti i file con i quali ha lavorato.

DOMANDA: La maggior parte delle **figure** sono state realizzate con Corel-Draw da me medesimo. Alcune figure invece sono state scaricate da internet o copiate da libri. Mi chiedo se per queste necessario inserire un riferimento al sito internet dal quale sono state scaricate per evitare eventuali problemi di Copyright.

RISPOSTA: Per quanto riguarda le figure può adoperare qualsiasi programma lei desideri, ma è importante che nella cartella della tesi sia presente, **per ogni figura da lei realizzata**, una copia del file in formato SVG (scalable vector graphics). Ciò permette una facile modifica delle figure a posteriori. Ove possibile è opportuno evitare il copia e incolla di figure da internet o libri al

mero scopo di risparmiare tempo. Se possibile, una figura va rifatta per conto proprio, a meno che non si tratti di disegni, dati, grafici, foto, recuperate altrove. Non si preoccupi dei diritti d'autore. Si preoccupi però di citare le fonti.

11 Alcuni errori comuni nella scrittura della tesi

Utilizzo degli accenti. Importante: l'utilizzo degli accenti. Ad esempio, l'accento nella parola “perché” non “è” lo stesso che nella parola “caffè”.

Utilizzo delle formule. Due regole fondamentali della costruzione del periodo sono le seguenti: nessuna parola può apparire avulsa da una frase; nessuna frase può apparire al di fuori di un periodo. Lo stesso vale per le espressioni matematiche. Ogni espressione matematica, sia che appaia nel testo, sia che appaia in display, deve essere inserita nel proprio contesto in modo da poter essere sostituibile con una frase di senso compiuto. Dunque, le regole sopra esposte per frasi e parole si applicano anche alle espressioni matematiche. In particolare, anche se una frase contiene delle espressioni matematiche, continuano ad essere valide le regole correnti della punteggiatura — soprattutto quella che impone l'utilizzo del punto alla fine di ciascun periodo.

In generale, si può far riferimento alle linee guida per la redazione dei compiti a casa del corso di Scienza delle Costruzioni.

12 Riferimenti bibliografici

Qualora si riportino concetti o idee che non sono frutto dell'ingegno dello studente e non fanno parte del bagaglio standard, è obbligatorio riportare le fonti dalle quali questi concetti o queste idee sono state tratte. Questo accorgimento serve ad evitare che il lettore pensi che chi scrive voglia dar ad intendere che idee altrui siano proprio frutto.

13 Dubbi o incertezze

Accuratezza nella redazione della bozza La bozza proposta al relatore per la revisione periodica non deve contenere affermazioni delle quali lo studente non è certo. Eventualmente, lo studente può inserire dei riquadri o dei commenti a margine nei quali illustra le proprie incertezze. Questi commenti devono essere ben separati dal testo principale, devono essere facilmente riconoscibili, e devono essere agevolmente interpretabili dal lettore SENZA CHE SIA NECESSARIA ALCUNA SPIEGAZIONE O PRECISAZIONE VERBALE DA PARTE DELLO SCRIVENTE.

Appunti Può capitare di avere degli appunti scritti in LaTeX e di volerli incorporare nella tesi senza presentarli al relatore. In tal caso, può essere una buona idea inserire il testo in un riquadro che separi il contenuto dal resto della tesi. Conviene in tal caso adoperare delle macro che nascondano la bozza quando occorre compilare una copia da presentare al relatore per la revisione periodica, in modo da evitare che nella copia appaia del testo che è ancora in fase di maturazione.

Parti da completare È bene evitare, dove possibile, che la bozza proposta per la revisione contenga parti incomplete. Dove ciò sia inevitabile, è bene che le parti incomplete siano evidenziate con un testo di colore differente dal nero. Questo può essere fatto adoperando il pacchetto “color” col comando

```
\usepackage{color}
```

, antepoendo il comando

```
\color{red}
```

e posponendo il comando

```
\color{black}
```

al testo che si intende evidenziare.

14 Figure

Un modo conveniente per generare le figure è un programma che generi file in formato svg (scalable vector graphics). Un esempio è inkscape (<https://inkscape.org/it/>).

Le figure devono essere incorporate nella tesi in formato pdf. Esse devono essere contenute nella stessa cartella del sorgente .tex

Volendo importare figure da Mathematica, conviene non esportarle in formato jpeg, ma piuttosto esportarle in formato PDF, in modo che non risultino “sgranate”.

Il testo che segue è l'estratto di una bozza di tesi sulle applicazioni della teoria delle funzioni ellittiche alla risoluzione dell'equazione dell'Elastica di Eulero. Lo studente potrà verificare che, sebbene le costruzioni grammaticali e sintattiche siano sostanzialmente corrette, in ultima analisi il contenuto informativo del testo è modesto. Ciò perché le affermazioni contenute nel testo non sono concatenate tra loro in modo da costituire un flusso. Per verificare la mancanza di concatenazione logica tra le affermazioni è sufficiente il seguente esperimento: si prendano delle frasi a caso e ne si cambi la posizione. Se il cambio di posizione non altera la comprensibilità della frase o dell'affermazione, vuol dire che questa non risulta inserita in un contesto organico.

15 Introduzione

Nella presente sezione si vuole introdurre la teoria degli integrali ellittici e delle funzioni, non algebriche,¹ che li risolvono:² le *funzioni ellittiche*. Si consideri la generica funzione $f(x, y)$ con i due argomenti x e y^3 e l'integrale:

$$\int f(x, \sqrt{P(x)})dx,$$

dove il termine $P(x)$ un polinomio razionale intero⁴ in x . Il grado di tale polinomio determina la tipologia di integrale.

Se $P(x)$ un polinomio di primo o secondo grado⁵ l'integrale risolvibile tramite l'utilizzo di variabili ausiliare⁶ e riconducibile a funzioni algebriche o logaritmiche.⁷ Se $P(x)$ supera il secondo grado la $f(x)$ associata diventa una trascendente, ovvero una funzione non algebrica.

Nel seguente studio andremo ad analizzare i casi in cui il grado del polinomio pari a 3 o 4, in tal caso l'integrale prende il nome di integrale *ellittico*,⁸ in quanto il suo valore esprime la lunghezza di un arco di ellisse.⁹

Gli integrali dove la $P(x)$ ha un grado maggiore al quarto prendono il nome di *superellittici*, ma non verranno trattati nel seguente studio.

Il problema degli integrali ellittici ha avvicinato molti importanti matematici che hanno contribuito all'avanzamento del loro studio quali Eulero, Bernoulli, Legendre e molti altri. Di fondamentale importanza lo studio effettuato da Jacobi e Abel, la loro idea fu quella di espandere lo studio ai valori complessi delle variabili e di studiare le funzioni che nascono dall'inversione degli integrali stessi.

¹Spiegare cosa è una funzione algebrica

²Cosa significa risolvere un integrale?

³ x e y sono variabili reali?

⁴Spiegare cosa è un polinomio razionale e cosa è un polinomio intero.

⁵Cosa è il grado di un polinomio razionale?

⁶Ausiliarie.

⁷Cosa è una funzione logaritmica?

⁸Che nome ha l'integrale nel caso in cui il grado sia pari a 2?

⁹Spiegare meglio.

Per comprendere meglio si consideri l'integrale:

$$y = \int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

la cui soluzione¹⁰ la funzione $y = \arccos x$, in questo caso studiare la variabile y in funzione di x risulta svantaggioso rispetto allo studio della x in funzione della y . Infatti la funzione inversa associata $x = \cos y$ presenta caratteristiche più semplici, uniforme e periodica del suo argomento, a differenza della funzione infinitiforme che avevamo in precedenza.

Compresa l'importanza dello studio delle funzioni inverse e utilizzando l'analisi complessa, Jacobi introdusse tre funzioni per studiare gli integrali di tipo ellittico:¹¹

$$sn\,y \quad cn\,y \quad dn\,y$$

Rispettivamente le funzioni "seno amplitudine", "coseno amplitudine" e "delta amplitudine".¹² Tali funzioni sono definite *funzioni ellittiche* ovvero funzioni a variabile complessa, uniformi in tutto il piano¹³ con singolarità polari¹⁴ a distanza finita e doppiamente periodiche.¹⁵

Non avendo singolarità essenziali¹⁶ ed essendo infinitesime¹⁷ negli stessi punti possono esprimersi attraverso quozienti di trascendenti intere (Teorema di Weierstrass*).¹⁸ Gli infinitesimi¹⁹ di queste trascendenti sono disposti in maniera doppiamente periodica, sebbene tali funzioni non presentino più periodicità. Le nuove funzioni prendono il nome di funzioni θ (theta), che possono considerarsi come un'unica trascendente²⁰ attraverso la quale possono esprimersi tutte le funzioni di questa teoria.²¹

La teoria di Jacobi stata in seguito perfezionata da Weierstrass, che alle tre funzioni, introdotte in precedenza, ha sostituito un'unica funzione:

$$\wp u,$$

che prende il nome di funzione ellittica di Weierstrass. Per mezzo della $\wp u$ e delle sue derivate possiamo esprimere razionalmente²² tutte le funzioni ellittiche nell'argomento u . Alle funzioni theta viene sostituita la trascendente intera σu , con proprietà simili, ma più semplici. Nella teoria di Weierstrass attraverso la σu si esprimono tutte le funzioni e gli integrali ellittici.

¹⁰So dare un senso alla soluzione di una equazione, ma non alla soluzione di un integrale.

¹¹Indicare precisamente a quali integrali ellittici queste funzioni corrispondono

¹²Dare la definizione

¹³Cosa si intende per funzione uniforme?

¹⁴Spiegare cosa è una singolarità polare

¹⁵Cosa si intende per doppiamente periodico?

¹⁶Definizione di singolarità essenziale?

¹⁷Cosa significa funzione infinitesima?

¹⁸Riportare l'enunciato del Teorema di Weierstrass (ipotesi e tesi)

¹⁹Cosa è un infinitesimo?

²⁰Sono più funzioni oppure è una funzione sola? Non si capisce.

²¹Di quale teoria stiamo parlando?

²²Cosa significa "esprimere razionalmente"?

16 Costruzione della σu

Per comprendere al meglio la teoria conveniente iniziare dalla determinazione della funzione σu e ricavare poi le altre funzioni della teoria di Weierstrass. Si consideri inizialmente la trascendente intera:²³²⁴

$$\text{sen}\left(\frac{\pi z}{2\omega}\right),$$

dove ω rappresenta una costante complessa.²⁵²⁶ Tale funzione uniforme²⁷ su tutto il piano complesso ed ha la particolarit di avere le proprie radici distribuite periodicamente con periodo 2ω :

$$z_0 = m 2\omega,$$

con m numero reale intero positivo o negativo.

La funzione σu ha caratteristiche analoghe, ma i suoi infinitesimi hanno la particolarit di essere doppiamente periodici, con periodi 2ω e $2\omega'$:

$$u_0 = m 2\omega + n 2\omega',^{28}$$

dove m e n sono due reali interi. I periodi ω e ω' devono essere in rapporto complesso,²⁹ se cos non fosse sarebbero multipli di uno stesso periodo fondamentale 2Ω e la funzione diventerebbe la trascendente:³⁰

$$\text{sen}\left(\frac{\pi u}{2\Omega}\right).^{31}$$

Inoltre se il rapporto dei periodi fosse reale, nell'intorno di ogni infinitesimo se ne addenserebbero infiniti altri.³² Quindi:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta \quad \beta \neq 0,$$

potendo cambiare il segno dei periodi³³ poniamo, per ragioni che in seguito saranno pi chiare, $\beta > 0$. Se si costruisce il parallelogramma fondamentale partendo da $u_0 = 0$ i vertici saranno:

$$0, \quad 2\omega, \quad 2\omega + 2\omega', \quad 2\omega'.$$

²³Cosa si intende per funzione trascendente?

²⁴Cosa è una funzione intera?

²⁵Come è definito il seno di un numero complesso?

²⁶Cosa è z ?

²⁷Cosa si intende per uniforme?

²⁸Che cosa vuol significare questa formula? Chi è u_0 ? Questa formula è una definizione?

Di cosa?

²⁹Cosa vuol dire "rapporto complesso"?

³⁰Inserire la dimostrazione.

³¹Che cosa è questa formula? Cosa significa?

³²Perché?

³³Cosa si intende per periodo negativo?

La scelta di prendere il coefficiente immaginario del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ positivo, comporta che percorrendo il contorno dl parallelogrammo nel verso positivo³⁴ si incontrano i vertici nell'ordine sopra indicato. Gli infinitesimi di primo ordine della trascendente che voglio costruire dovranno trovarsi nei vertici del parallelogramma sopra descritto.³⁵

Per questo motivo la distanza di tali infinitesimi sempre maggiore della quantità più piccola tra 2ω , $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$, $2\omega - 2\omega'$.³⁶ Allora la σu pu essere espressa come:³⁷

$$\sigma u = u \prod_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} \quad 38$$

dove $w = 2m\omega + 2n\omega'$. Si trovata quindi l'espressione per la trascendente intera σ nella variabile complessa u . Tale trascendente ha la particolarit di essere una funzione dispari e di essere omogenea sul tutto il piano complesso.

17 Determinazione delle funzioni ζu , $\wp u$ e $\wp' u$

39

Si vuole ora introdurre un'altra importante funzione della teoria degli integrali ellittici: la funzione ζu . Essa viene definita da Weierstrass⁴⁰ come la derivata logaritmica della trascendente intera σu :⁴¹

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u},$$

questa funzione ancora una funzione dispari⁴² ed interessante notare come i punti $u_0 = 2m\omega + 2n\omega'$ siano dei poli del primo ordine per la funzione ζu .⁴³ Se si deriva ζu e la si cambia di segno, si ottiene una funzione di fondamentale importanza per il teorema di Weierstrass:

$$\wp u = -\zeta' = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}.$$

Si pu subito notare che a differenza delle funzioni σu e ζu , la funzione $\wp u$ una funzione pari:

$$\wp(-u) = \wp u,$$

³⁴Cosa è il verso positivo del contorno del parallelogramma?

³⁵Come si dimostra?

³⁶Quale motivo? Come si dimostra questa implicazione?

³⁷Di quali premesse è conseguenza questa equazione?

³⁸Si tratta della definizione di σu ? Se è così, perché abbiamo parlato per una pagina intera di questa funzione σ e la definizione è data solo ora?

³⁹Perché abbiamo scelto la parola "determinazione"?

⁴⁰Specificare la fonte

⁴¹Inserire un rimando alla spiegazione della nozione di derivata di una funzione di variabile complessa.

⁴²Dare la definizione di funzione dispari nel contesto delle funzioni di variabile complessa.

⁴³Inserire un richiamo alla definizione di "polo del primo ordine". Dimostrare questa affermazione.

la si pu esprimere analiticamente come:⁴⁴

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right\},$$

per comprendere meglio la teoria degli integrali ellittici per importante introdurre anche la funzione $\wp' u$, che si ottiene derivando nuovamente l'espressione analitica⁴⁵ sopra ottenuta:

$$\wp' u = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^3},$$

si noti che la $\wp' u$ una funzione dispari, difatti la $\wp u$ e tutte le derivate di ordine pari $\wp'' u$, $\wp^{IV} u$,... sono funzioni pari, al contrario le derivate dispari $\wp''' u$, $\wp^V u$,... sono funzioni dispari. Entrambe le serie introdotte convergono⁴⁶ nel campo finito⁴⁷ con l'esclusione dei punti:

$$u_0 = 2m\omega + 2n\omega',$$

i quali sono per $\wp u$ e $\wp' u$ rispettivamente poli del secondo e terzo ordine. Nell'espressione della $\wp' u$ si nota un aspetto cruciale della teoria di Weierstrass:⁴⁸

$$\wp'(u + 2m\omega + 2n\omega') = \wp' u,$$

ovvero la funzione *doppiamente periodica* con periodi fondamentali 2ω e $2\omega'$, questa propriet anche se meno evidente posseduta anche dalla $\wp u$ e tutte le sue derivate.

Si pu concludere che la funzione $\wp u$ di Weierstrass e le sue derivate sono funzioni uniformi in tutto il piano complesso e doppiamente periodiche con periodi fondamentali 2ω e $2\omega'$.

Se si costruisce il parallelogramma fondamentale⁴⁹ della funzione $\wp u$ si hanno come vertici i punti $u_o = 2m\omega + 2n\omega'$, dove la funzione ha dei poli del secondo ordine.

Per la risoluzione⁵⁰ degli integrali ellittici necessario introdurre l'equazione differenziale che lega la $\wp u$ con la $\wp' u$:⁵¹

$$\wp'^2 = 4(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp\omega')(\wp u - \wp(\omega + \omega')),$$

Se si identificano con :⁵²

$$e_1 = \wp\omega \quad e_2 = \wp\omega' \quad e_3 = \wp(\omega + \omega'),$$

⁴⁴Dimostrare questa affermazione.

⁴⁵L'aggettivo analitico sottintende che la funzione è olomorfa?

⁴⁶Che tipo di convergenza è?

⁴⁷Cosa si intende per "campo finito"?

⁴⁸Come si dimostra questa affermazione?

⁴⁹Cosa si intende per parallelogramma fondamentale? Perché questo nome?

⁵⁰Un integrale non è una equazione, ma un numero o, nel caso di integrali indefiniti, una funzione. Non è dunque chiaro cosa voglia dire "risolvere un integrale".

⁵¹Come si ricava questa equazione?

⁵²Qual è il complemento oggetto di questa frase?

l'equazione pu essere anche espressa nella forma canonica come:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

dove g_2 e g_3 sono degli invarianti⁵³ e il loro valore dato da:

$$g_2^o = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \quad g_3^o = 4e_1e_2e_3.$$

18 Risoluzione dell'integrale ellittico

Si vuole ora andare ad applicare la teoria degli integrali ellittici per risolvere l'equazione differenziale:

$$(w')^2 = P(w),$$

dove $P(w)$ un generico polinomio in w . Sebbene lo studio possa essere effettuato anche con un polinomio di quarto grado, nel presente studio si analizza il caso in cui $P(w)$ sia di terzo grado:

$$P(w) = a_0w^3 + 3a_1w^2 + 3a_2w + a_3,$$

in tal caso per ricondurre l'integrale ellittico associato $\frac{dw}{\sqrt{P(w)}}$ alla forma canonica di Weierstrass:

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}},$$

si dovr effettuare la trasformazione lineare:

$$w = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{4}{a_0}s,$$

cosi da ottenere il polinomio nella forma $4s^3 - g_2s - g_3$. Effettuate le sostituzioni ci si riconduce alla forma:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3,$$

Ricordando che la funzione $\wp u$ soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

si pu notare come la funzione di Weierstrass sia la soluzione dell'equazione, andando a sostituire $s = \wp(z)$:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 1,$$

⁵³Mi chiedo se la parola "invariante", in questo contesto, sia semplicemente un nome (da prendere per buono), oppure più propriamente un aggettivo qualificativo. Nel primo caso, sarebbe opportuno evidenziare la parola in corsivo, in modo da far percepire al lettore il suo significato definitorio. Nel secondo caso, sarebbe opportuno spendere qualche parola per specificare rispetto a quale trasformazione g_2 e g_3 risultano invarianti.

che ha come soluzioni $z = \pm u + u_0$ che implica $s = \wp(\pm u + u_0)$, ma essendo la funzione pari possiamo concludere:

$$s = \wp(u + u_0; g_2 g_3),$$

dove u_0 una costante e si determina per $u = 0$. Inoltre conoscendo le radici dell'equazione di 3 grado in s , si possono conoscere anche i periodi fondamentali della funzione \wp e gli invarianti g_2 e g_3 .

Si consideri ora il caso integrale in cui venga definita la funzione:

$$u(s) := \int_s^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

derivando rispetto ad u si ottiene:

$$1 = -\frac{ds}{du} \frac{1}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

la cui soluzione :

$$s = \wp(u + u_0; g_2 g_3)$$